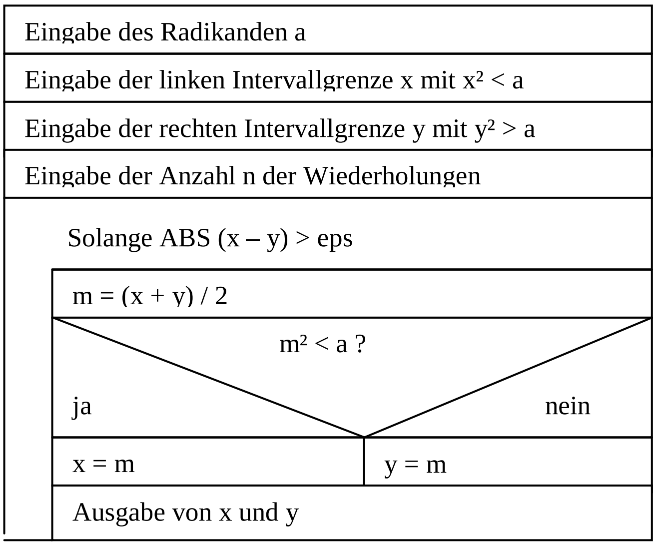
Das Intervallhalbierungsverfahren

Vorgehensweise:

- Suche durch Ausprobieren eine Zahl x, die kleiner ist als $\sqrt{a}$ und eine Zahl, die größer ist als $\sqrt{a}$. Die Zahl $\sqrt{a}$ liegt dann im Intervall [x, y].
- Bilde den Mittelwert m = (x + y) / 2.
- Überprüfe, ob das Quadrat des Mittelwertes m^2 kleiner ist als a.
- Wenn ja, dann liegt $\sqrt{a}$ im Intervall [m, y].
- Wenn nein, dann liegt $\sqrt{a}$ im Intervall [x, m].
- Eine wiederholte Anwendung des Verfahrens liefert eine Intervallschachtelung mit dem Zentrum $\sqrt{a}$.
- Ein solches Rechenverfahren heißt **Iterationsverfahren**.

Algorithmus



Aufgabe 1:

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Vorschrift $\sqrt{10}$ näherungsweise (7 Schritte) mit „Bleistift und Papier“! Legen Sie dazu die folgende Tabelle an! Verwenden Sie als Startwerte x = 3 und y = 4.

Nummer des Rechenschrittes	x	x^2	y	y^2	m	m^2

Aufgabe 2:

Setzen Sie den oben angegebenen Algorithmus in DELPHI um. Verändern Sie den Algorithmus so, dass die Schleife nicht n – mal durchlaufen wird. Stattdessen soll vom Benutzer eine Abweichung (`eps`) eingegeben werden, so dass das Programm die Berechnung abbricht, wenn die Abweichung zwischen x und y den vorgegebenen Wert `eps` unterschreitet.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie $\sqrt{10}$ mit Hilfe Ihres Programms mit einer Genauigkeit von 0,000001!

Aufgabe 4:

Das HERON – Verfahren ist ein weiteres Iterationsverfahren zur näherungsweisen Berechnung einer Wurzel. Machen Sie sich kurz mit dem Verfahren und dem angegebenen Struktogramm des Algorithmus vertraut!
Der folgende Absatz ist entnommen aus Lergenmüller, Schmidt: *LS Computer Zusatzband*, Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1990.

11 Das Heronsche Verfahren zur Wurzelbestimmung

Das Produkt der Zahlen des Paares (2; 8) beträgt 16. Berechne 4 weitere Zahlenpaare mit dem gleichen Produkt, indem du eine Zahl des Paares durch den Mittelwert der beiden Zahlen ersetzt und die zweite Zahl passend errechnest.
Beispiel: (2; 8) ⟶ (3,2; 5) . . . . Was kannst du beobachten?

Seit dem Altertum ist ein Verfahren bekannt, mit dem man näherungsweise die Lösung der Gleichung $x^2 = a$ für $a > 0$, d.h. $\sqrt{a}$ bestimmen kann. Es wird das Heronsche Verfahren genannt, nach dem griechischen Mathematiker HERON, der in Alexandria um 100 n.Chr. lebte. Wir wollen es geometrisch an einem Beispiel darstellen.
Die Gleichung $x^2 = 12$ ist der Spezialfall der Gleichung $x \cdot y = 12$. Geometrisch interpretiert ist die (positive) Lösung der Gleichung $x^2 = 12$ die Kantenlänge eines Quadrates mit der Fläche 12 FE.; eine Lösung der Gleichung $x \cdot y = 12$ die Länge und die Breite eines Rechtecks mit der Fläche 12 FE. Ein Rechteck mit der Fläche 12 FE. ist leicht zu finden, z.B. Länge $x_0 = 12$ und Breite $y_0 = 1$ (Fig.6). Suchen wir jedoch ein „Rechteck" mit gleich langen Seiten, so ist das Rechteck in Fig. 6 zu lang und zu schmal. Wir müssen also die längere Seite verkürzen, ohne daß dabei der Flächeninhalt verändert wird. Wir wählen als neue Länge x_1 den Mittelwert aus Länge x_0 und Breite y_0. Damit der Flächeninhalt 12 FE. beträgt, muß die neue Breite $y_1 = \frac{12}{x_1}$ sein. Das entstandene Rechteck (Fig. 7) ist zwar immer noch kein Quadrat; wendet man aber das beschriebene Verfahren wiederholt an, so kann man erkennen, wie aus dem Rechteck allmählich ein Quadrat wird (Fig. 6 - 9). Durch die Bildung des Mittelwertes unterscheiden sich die beiden Zahlen immer weniger, da das Produkt 12 bleibt.

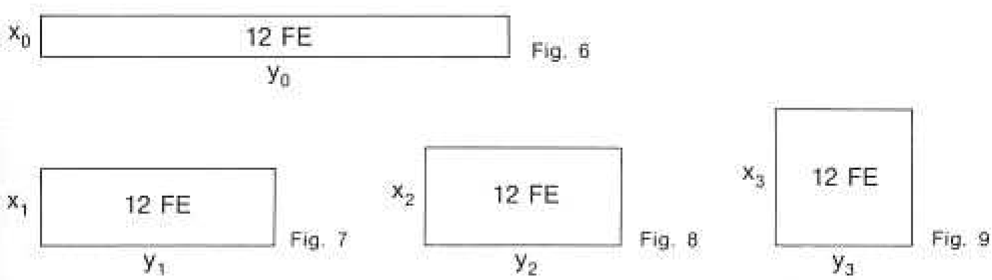


Fig. 6 Fig. 7 Fig. 8 Fig. 9

Das **Heronsche Näherungsverfahren** zur Bestimmung von $\sqrt{a}$:
Aus den Startwerten x_0, y_0 mit $x_0 * y_0 = a$ erhält man durch wiederholte Anwendung der folgenden Formel

$$y_i = \frac{x_{i-1} + y_{i-1}}{2} \qquad x_i = \frac{a}{y_i}$$

einen Näherungswert für $\sqrt{a}$.

Algorithmus

Eingabe des Radikanden
Eingabe der Startwerte x und y
Solange ABS (x – y) > eps
$y_{neu} = (x_{alt} + y_{alt}) / 2$
$x_{neu} = a / y_{neu}$
Ausgabe von x und y

Aufgabe 5:

Laden Sie sich das Programm Iterationsverfahren auf Ihren Rechner und berechnen Sie wiederum $\sqrt{10}$ diesmal mit dem HERON – Verfahren mit der gleichen Genauigkeit von 0,0000001. Vergleichen Sie die Anzahl der benötigten Rechenschritte bei den beiden untersuchten Iterationsverfahren! Welche Aussage zur Effizienz der beiden Algorithmen lässt sich treffen?